Obliczenia naukowe

Sprawozdanie

Lista 2

Mateusz Laskowski

11.11.2018

1. **Zadanie 1**
   1. **Opis problemu**

Powtórzyć zadanie 5 z listy nr 1, lecz zmianą w tym zadaniu jest usunięcie ostatniej cyfry 9 z oraz ostatniej cyfry 7 z Sprawdzić jaki wpływ na wyniki mają wykonane niewielkie zmiany w danych.

**Przypomnienie, jaki cel miało zadanie 5 z listy nr 1.**

Napisać program w języku Julia realizujący następujący eksperyment obliczania iloczynu skalarnego dwóch wektorów:

*x =* [2.718281828, −3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]

*y* = [1486.2497, 878366.9879, −22.37492, 4773714.647, 0.000185049]

1. „w przód”
2. „w tył”
3. Suma wszystkich częściowych iloczynów skalarnych zaczynając od **największego**

do **najmniejszego** wyniku częściowego

1. Suma wszystkich częściowych iloczynów skalarnych zaczynając od **najmniejszego** do **największego** wyniku częściowego
   1. **Rozwiązanie problemu**

Uruchomiłem program z pierwszej listy po dokonaniu zmian w wektorach, usunąłem ostatnią cyfrę 9 z oraz usunąłem ostatnią cyfrę 7 z Wyniki zestawiłem z wynikami programu bez modyfikacji.

* 1. **Wyniki**

Ryc. 1.1 – Tabela przedstawia zestawienie wyników w arytmetyce **Float32**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Algorytm | Suma bez zmian wektorów | Suma z modyfikacją wektorów |
| (a) | -0.4999443 | -0.4999443 |
| (b) | -0.4543457 | -0.4543457 |
| (c) | -0.5 | -0.5 |
| (d) | -0.5 | -0.5 |

Ryc. 1.2 – Tabela przedstawiająca zestawienie wyników w arytmetyce **Float64**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Algorytm | Suma bez zmian wektorów | Suma z modyfikacją wektorów |
| (a) | 1.0251881368296672e-10 | -0.004296342739891585 |
| (b) | -1.5643308870494366e-10 | -0.004296342998713953 |
| (c) | 0.0 | -0.004296342842280865 |
| (d) | 0.0 | -0.004296342842280865 |

Ryc. 1.3 – Tabela przedstawiająca dokładne wyniki sumowania wektorów

|  |  |
| --- | --- |
| *Float64* | *Float32* |
|  |  |

* 1. **Wnioski**

W przypadku arytmetyki Float32 usunięcie ostatnich cyfr nie miało wpływu na wynik ostateczny, ponieważ arytmetyka nie jest wystarczająco dokładna. Liczby pojedynczej precyzji pozwalają na zapis do 7-miu cyfr znaczących w reprezentacji dziesiętnej. Modyfikacja wektora w zadaniu dotyczyła cyfry na pozycji 10-tej, więc nie doprowadziło to widocznej zmiany na cyfrach znaczących.

Natomiast w przypadku arytmetyki Float64 lekka miana wektorów przyczyniła się do zmiany wyjściowego wyniku. Wynik ten wciąż odbiega od poprawnego wyniku, lecz jest dużo bardziej dokładny niż bez modyfikacji wektorów. Zmniejszenie dokładności składowych wektora pozwoliło na bliższe sobie wyniki z każdego osobnego algorytmu sumowania. Jak widać poprzez 10-tą cyfrę po przecinku wyniki zaczęły się mocno rozbiegać.

1. **Zadanie 2**
   1. **Opis problemu**

Narysować wykres funkcji w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie policzyć granicę funkcji *.*

Porównać wykres funkcji z policzoną granicą oraz wyjaśnić zjawisko jakie zachodzi.

* 1. **Rozwiązanie problemu**

Granica funkcji :

Wykonałem obliczenia funkcji dla *x*od 0 do 40 oraz wykonałem wykresy z otrzymanych danych.

* 1. **Wyniki**

Wykresy wygenerowane za pomocą dwóch programów do wizualizacji. Pierwszy wykres Ryc. 2.1 powstał w języku Julia za pomocą biblioteki Plots, zaś drugi wykres Ryc. 2.2 powstał w języku Python za pomocą biblioteki matplotlib.

Ryc. 2.1 – Wykres wygenerowany w języku Julia

|  |
| --- |
|  |

Ryc. 2.2 – Wykres wygenerowany w języku Python

|  |
| --- |
|  |

* 1. **Wnioski**

Na podanych wykresach widać, że przy , na wykresie zaczynają się pojawiać duże odchyły wartości, gdzie dla *x* większego od 36 funkcja ma wartość 0. Głównym czynnikiem takich wariacji wartości jest operacja mnożenia bardzo dużej liczby Aż w pewnym momencie funkcja wynosi zero.

1. **Zadanie 3**
   1. **Opis problemu**

Rozwiązać układ równań liniowych za pomocą dwóch algorytmów: eliminacji Gaussa oraz Eksperymenty przeprowadzić dla macierzy Hilberta z rosnącym stopniem oraz dla macierzy losowej

z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania

Policzyć błędy względne i porównać z rozwiązaniem dokładnym.

* 1. **Rozwiązanie problemu**

W celu utworzenia podanych macierzy wykorzystałem funkcje hilb(n) – generująca macierz Hilberta stopnia *n* – oraz matcond(n, c) – generująca macierz losową stopnia *n* z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania *c*. Błędy względne obliczeń wyliczyłem przy pomocy normy wektora:

* 1. **Wyniki**

Ryc. 3.1 – Tabela przedstawia błędy względne dla **macierzy Hilberta**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***n*** | ***cond*** | ***gauss*** | ***inverted*** |
| 1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 19.28147006790397 | 5.661048867003676e-16 | 1.1240151438116956e-15 |
| 3 | 524.0567775860644 | 8.022593772267726e-15 | 9.825526038180824e-15 |
| 4 | 15513.73873892924 | 4.4515459601812086e-13 | 2.950477637286781e-13 |
| 5 | 476607.25024259434 | 1.6828426299227195e-12 | 8.500055777753297e-12 |
| 6 | 1.4951058642254665e7 | 2.618913302311624e-10 | 3.3474135070361745e-10 |
| 7 | 4.75367356583129e8 | 1.2606867224171548e-8 | 5.163959183577243e-9 |
| 8 | 1.5257575538060041e10 | 1.026543065687064e-7 | 2.698715074276819e-7 |
| 9 | 4.931537564468762e11 | 4.83235712050215e-6 | 9.175846868614517e-6 |
| 10 | 1.6024416992541715e13 | 0.0006329153722983848 | 0.00045521422517408853 |
| 11 | 5.222677939280335e14 | 0.011543958596122112 | 0.00804446677343116 |
| 12 | 1.7514731907091464e16 | 0.2975640310734787 | 0.34392937091205217 |
| 13 | 3.344143497338461e18 | 2.375017867706776 | 5.585796893150773 |
| 14 | 6.200786263161444e17 | 5.281004646755168 | 4.800641929017436 |
| 15 | 3.674392953467974e17 | 1.177294734836712 | 4.8273577212576475 |
| 16 | 7.865467778431645e17 | 20.564655823804095 | 31.736467496266126 |
| 17 | 1.263684342666052e18 | 17.742214635179074 | 15.910335962604142 |
| 18 | 2.2446309929189128e18 | 4.2764564411159425 | 6.281223433472033 |
| 19 | 6.471953976541591e18 | 22.119937292648906 | 22.92561401563632 |
| 20 | 1.3553657908688225e18 | 14.930069669294001 | 21.53949860251383 |

Ryc. 3.2 – Tabela przedstawia błędy względne dla **macierzy losowej** o współczynniku *cond*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***n*** | ***cond*** | ***gauss*** | ***inverted*** |
| 5 | 1.0 | 9.930136612989092e-17 | 5.528866075183428e-16 |
| 5 | 3.0 | 1.2872172993348367e-14 | 1.6187493345516222e-14 |
| 5 | 7.0 | 9.891015218792042e-11 | 3.4375612071191857e-10 |
| 5 | 12.0 | 7.295011118019287e-6 | 4.8888371474598434e-5 |
| 5 | 16.0 | 0.20525387226858713 | 0.25856403398852085 |
| 10 | 1.0 | 7.982804644978158e-16 | 8.158439733063109e-16 |
| 10 | 3.0 | 7.543089232057327e-14 | 6.407947240619581e-14 |
| 10 | 7.0 | 8.969538169778931e-10 | 4.325562062623882e-10 |
| 10 | 12.0 | 8.37407170623145e-5 | 6.06374931824181e-5 |
| 10 | 16.0 | 1.1234520622231834 | 0.8337349142359708 |
| 20 | 1.0 | 6.454588798442909e-16 | 8.203639191033913e-16 |
| 20 | 3.0 | 5.754394216095572e-15 | 2.8106496957992408e-14 |
| 20 | 7.0 | 5.348362088472877e-10 | 2.559855198677472e-10 |
| 20 | 12.0 | 1.3621359328727006e-5 | 1.6463748074688822e-5 |
| 20 | 16.0 | 0.043939229124012054 | 0.563291610564292 |

* 1. **Wnioski**

W przypadku macierzy losowych, błąd bezwzględny, niezależnie od stopnia macierzy oscyluje w granicach Jednakże w przypadku macierzy Hilberta można zaobserwować wiele więcej.

Macierz Hilberta jest tworzona z elementami danymi wzorem . Macierz Hilberta jest podręcznikowym przykładem macierzy źle uwarunkowanej, ponieważ duża ilość komórek z macierzy nie da się zapisać w postaci skończonej w reprezentacji binarnej, przykładowo . Wykonując obliczenia z jej użyciem jesteśmy narażeni na duży wpływ błędu wynikającego z reprezentacji numerycznej, dlatego rozwiązanie w numeryczny sposób nawet dla niewielkich układów równań z macierzą jest praktycznie nie możliwe.

Po obserwacji, wywnioskowałem, że wraz ze wzrostem stopnia macierzy, błąd obliczeń wykonywanych metodą eliminacji Gaussa, jak i przy użyciu macierzy odwrotnej, rośnie wraz ze wzrostem stopnia macierzy. Jednakże, wynik w przypadku metody Gaussa jest opatrzony mniejszym błędem, ponieważ algorytm ten pozwala na dojście do wyniku w mniejszej ilości kroków (mniejszej ilości operacji) w algorytmie, a wiadomo, że mniej operacji to mniej zaokrągleń w arytmetyce numerycznej. W przypadku macierzy Hilberta i macierzy losowej, metoda Gaussa była lepsza, z powodu mniejszej ilości kroków w algorytmie, lecz błąd wciąż rósł wraz ze wzrostem stopnia *n* macierzy.

1. **Zadanie 4**
   1. **Opis problemu**

(„złośliwy wielomian”, Wilkinson) Zainstalować pakiet Polynomials.

1. Użyć funkcji roots (z pakietu Polynomials) do obliczenia 20 zer wielomianu *P* w postaci naturalnej, podanego w treści zadania. Sprawdzić obliczone pierwiastki obliczając . Wyjaśnić rozbieżności.
2. Powtórzyć eksperyment Wilkinsona,

tj. zmienić współczynnik na

* 1. **Rozwiązanie problemu**

Funkcja Poly(x) generuje wielomian zależny od współczynnika podanego jako parametr *x.* Metoda poly(x) tworzy wielomian na podstawie pierwiastków wielomianu. Funkcja polyval(p, x) wylicza wartości wielomianu *p* dla wczytywanego parametru *x*. Wykorzystałem w swoim programie wymienione wyżej metody zawarte w bibliotece Polynomials. Wyniki z podpunktu **(a)** zostały zamieszczone na Ryc. 4.1 oraz Ryc. 4.2, zaś wyniki z podpunktu (b) na Ryc. 4.3 i Ryc. 4.4.

* 1. **Wyniki**

Ryc. 4.1 – tabela z wynikami po eksperymencie Wilkinsona, podpunkt (a)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***k*** |  |  |  |
| 1 | 36352.0 | 38400.0 | 3.0109248427834245e-13 |
| 2 | 181760.0 | 198144.0 | 2.8318236644508943e-11 |
| 3 | 209408.0 | 301568.0 | 4.0790348876384996e-10 |
| 4 | 3.106816e6 | 2.844672e6 | 1.626246826091915e-8 |
| 5 | 2.4114688e7 | 2.3346688e7 | 6.657697912970661e-7 |
| 6 | 1.20152064e8 | 1.1882496e8 | 1.0754175226779239e-5 |
| 7 | 4.80398336e8 | 4.78290944e8 | 0.00010200279300764947 |
| 8 | 1.682691072e9 | 1.67849728e9 | 0.0006441703922384079 |
| 9 | 4.465326592e9 | 4.457859584e9 | 0.002915294362052734 |
| 10 | 1.2707126784e10 | 1.2696907264e10 | 0.009586957518274986 |
| 11 | 3.5759895552e10 | 3.5743469056e10 | 0.025022932909317674 |
| 12 | 7.216771584e10 | 7.2146650624e10 | 0.04671674615314281 |
| 13 | 2.15723629056e11 | 2.15696330752e11 | 0.07431403244734014 |
| 14 | 3.65383250944e11 | 3.653447936e11 | 0.08524440819787316 |
| 15 | 6.13987753472e11 | 6.13938415616e11 | 0.07549379969947623 |
| 16 | 1.555027751936e12 | 1.554961097216e12 | 0.05371328339202819 |
| 17 | 3.777623778304e12 | 3.777532946944e12 | 0.025427146237412046 |
| 18 | 7.199554861056e12 | 7.1994474752e12 | 0.009078647283519814 |
| 19 | 1.0278376162816e13 | 1.0278235656704e13 | 0.0019098182994383706 |
| 20 | 2.7462952745472e13 | 2.7462788907008e13 | 0.00019070876336257925 |

Ryc. 4.2 – tabela z pierwiastkami root-ów, podpunkt (a)

|  |  |
| --- | --- |
| ***n*** | ***pierwiastek*** |
| 1 | 0.9999999999996989 |
| 2 | 2.0000000000283182 |
| 3 | 2.9999999995920965 |
| 4 | 3.9999999837375317 |
| 5 | 5.000000665769791 |
| 6 | 5.999989245824773 |
| 7 | 7.000102002793008 |
| 8 | 7.999355829607762 |
| 9 | 9.002915294362053 |
| 10 | 9.990413042481725 |
| 11 | 11.025022932909318 |
| 12 | 11.953283253846857 |
| 13 | 13.07431403244734 |
| 14 | 13.914755591802127 |
| 15 | 15.075493799699476 |
| 16 | 15.946286716607972 |
| 17 | 17.025427146237412 |
| 18 | 17.99092135271648 |
| 19 | 19.00190981829944 |
| 20 | 19.999809291236637 |

Ryc. 4.3 – tabela z wynikami po eksperymencie Wilkinsona z modyfikacją, podpunkt (b)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***k*** |  |  |  |
| 1 | 19456.0 | 19456.0 | 1.6209256159527285e-13 |
| 2 | 54272.0 | 70656.0 | 7.66275931596283e-12 |
| 3 | 782848.0 | 875008.0 | 1.091470469560818e-9 |
| 4 | 2.555392e6 | 2.817536e6 | 2.7770935773219207e-8 |
| 5 | 6.717952e6 | 7.485952e6 | 2.3598509635291975e-7 |
| 6 | 1.9252736e7 | 1.7925632e7 | 1.293933244994605e-7 |
| 7 | 1.2139264e8 | 1.18582784e8 | 1.4538322562707151e-5 |
| 8 | 3.96893184e8 | 3.92699392e8 | 9.171398842866552e-5 |
| 9 | 7.4291456e8 | 4.60736e8 | 9.836127977891351e-5 |
| 10 | 6.253824e8 | 2.56111616e9 | 0.0019448004357265347 |
| 11 | 9.511332864e9 | 1.828041984e10 | 0.014794041182474515 |
| 12 | 2.434616064e10 | 1.10285019136e11 | 0.0701234129085595 |
| 13 | 8.770431488e10 | 3.4704067328e11 | 0.16494035599639645 |
| 14 | 4.1416595000481635e11 | 3.066962265995617e12 | 0.5425416609403566 |
| 15 | 4.1416595000481635e11 | 3.066962265995617e12 | 0.6388530054672362 |
| 16 | 3.3752053852365005e12 | 3.677478938782452e13 | 0.6668188874271295 |
| 17 | 3.3752053852365005e12 | 3.677478938782452e13 | 0.6032627181802658 |
| 18 | 1.277755372544e13 | 2.20104343106048e14 | 0.21784959517997393 |
| 19 | 2.3017536954368e13 | 4.451884076032e14 | 0.08732812123692923 |
| 20 | 5.2019032684032e13 | 1.2844306462848e15 | 0.010184050456800264 |

Ryc. 4.4 – tabela pierwiastków root-ów z modyfikacją, podpunkt (b)

|  |  |
| --- | --- |
| ***n*** | ***pierwiastek*** |
| 1 | 1.000000000000162 + 0.0im |
| 2 | 2.0000000000076628 + 0.0im |
| 3 | 2.9999999989085295 + 0.0im |
| 4 | 4.000000027770936 + 0.0im |
| 5 | 4.999999764014904 + 0.0im |
| 6 | 5.9999998706066755 + 0.0im |
| 7 | 7.000014538322563 + 0.0im |
| 8 | 7.999908286011571 + 0.0im |
| 9 | 9.000098361279779 + 0.0im |
| 10 | 10.001944800435727 + 0.0im |
| 11 | 10.985205958817525 + 0.0im |
| 12 | 12.07012341290856 + 0.0im |
| 13 | 12.835059644003604 + 0.0im |
| 14 | 14.4431091456307 - 0.3130586828605012im |
| 15 | 14.4431091456307 + 0.3130586828605012im |
| 16 | 16.540360760741656 - 0.3907143161956746im |
| 17 | 16.540360760741656 + 0.3907143161956746im |
| 18 | 18.217849595179974 + 0.0im |
| 19 | 18.91267187876307 + 0.0im |
| 20 | 20.0101840504568 + 0.0im |

* 1. **Wnioski**

Wyniki z podpunktu (a) wskazują na pewne rozbieżności w wynikach. Wartości oraz różnią się od siebie. Wyliczone wartości pierwiastków za pomocą funkcji roots(P(x)) różnią się od rzeczywistych pierwiastków. Po obserwacji wnioskuję, że operacje wyznaczenia wielomianu na podstawie współczynników lub utworzeniu za pomocą pierwiastków, są obarczone zaburzeniem dokładności, wynikający z precyzji arytmetyki, na której działają operacje.

Obserwując wyniki z podpunktu (b), można zauważyć, że niewielka zmiana w jednym ze współczynników, była skutkiem wielkich zmian w wynikach, a co za tym idzie wielki błąd w dokładności. Ta niewielka zmiana w skończonej arytmetyce wywołała wielkie zaburzenie w arytmetyce numerycznej. Funkcja roots(P(x)) wywołana na wielomianie ze zmodyfikowanym współczynnikiem zwróciła pierwiastki zespolone.

1. **Zadanie 5**
   1. **Opis problemu**

Równanie rekurencyjne (model logistyczny, model wzrostu populacji)

Należy przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych oraz wykonać 40 iteracji wyrażenia (1), następnie 40 iteracji wyrażenia (1) z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku i kontynuować obliczenia do 40-stej iteracji. Porównać wyniki. Obliczenia wykonać w arytmetyce Float32.
2. Dla danych i wykonać 40 iteracji wyrażenia (1) w arytmetyce **Float32** i Float64. Porównać wyniki.
   1. **Rozwiązanie problemu**

Stworzyłem program w języku Julia, który wylicza wyżej podane rekurencje.

* 1. **Wyniki**
  2. **Wnioski**